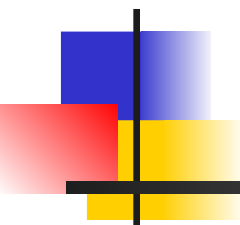


ВЗЕМАНЕ НА РЕШЕНИЯ

формална постановка на задачите на
многокритериалната оптимизация и
помощни дефиниции



Българска академия на науките
Институт по информационни технологии
Системи за подпомагане вземането на решения
Тодор Балабанов
София 2009

Съдържание



- Формулиране на задачата (3-7)
- Видове задачи (8-10)
- Помощни дефиниции (11-18)

Формална постановка

- "min" - минимизиране на всички критерии (целеви функции)
- k - брой критерии
- $f_i(x)$ - критерии (целеви функции) - всеки критерий е реална функция
- $f(x)$ - вектор на критериите
- x - вектор на променливите (алтернативите)
- S - допустимо множество на променливите, дефинирано със система от неравенства
- $g_j(x)$ - функциите на ограниченията са реални функции
- R^n - пространство на променливите
- R^k - пространство на критериите

$$\min_{x \in S} \{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$$

$$f_i(x), i = 1, 2, \dots, k$$

$$f_i : R^n \rightarrow R$$

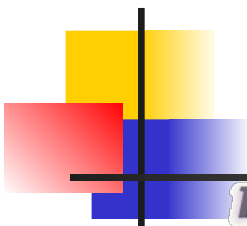
$$(f_1(x), \dots, f_k(x))^T$$

$$f(x) \in R^k$$

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T$$

$$S \subset R^n \quad \begin{cases} g_j(x) \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$g_j(x) : R^n \rightarrow R$$



Смисъл на задачата

- Ако критериите не са противоречиви, то съществува решение което е оптимално едновременно за всички критерии, то решението е тривиално
- Интерес представляват задачите при които всички критерии са противоречиви или поне част от критериите са противоречиви
- Ще се разглеждат само задачи за минимизация, тъй като критерии, които трябва да се максимизират може да се заменят по следния начин:

$$\max(f(x)) = -\min(-f(x))$$

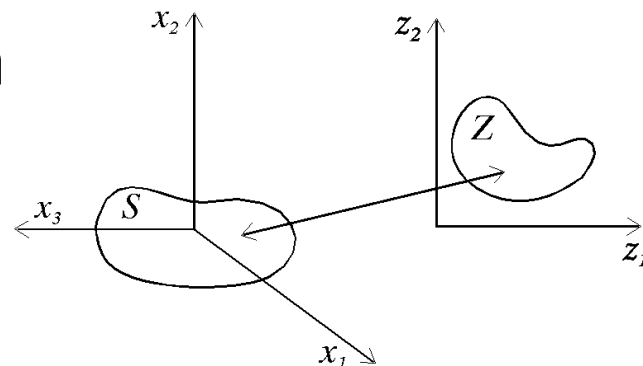
Пространства на променливите и на критериите



- Пространство на променливите R^n
- Пространство на критериите R^k
- При еднокритериалната оптимизация пространството на критериите е R , тъй като се оптимизира само един критерии

Допустим вектор на променливите

- Всяка точка x принадлежаща на множеството S се нарича допустим вектор на променливите
- Компонентите на x се наричат допустими стойности допустима стойност на променливата
- x^i допустим вектор x_j^i допустима стойност на вектора
- Образ на допустимото множество $Z = f(S)$, като Z принадлежи на множеството R^k





Допустим критериален вектор

 **INSTITUTE OF
INFORMATION TECHNOLOGIES**

- Всяка точка z , принадлежаща на множеството Z , се нарича допустим критериален вектор
- Компонентите на z се наричат допустими стойности на критерия
- Означение за вектор z^i
- Означение за стойност от вектора z^i_j

Линейна задача на многокритериалната оптимизация



- Това е задача при която всички критерии $f_i(x)$ и всички функции на ограниченията $g_j(x)$ са линейни функции

Изпъкнала задача на многокритериалната оптимизация

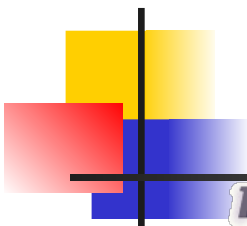


- Това е задача при която част от или всички критерии $f_i(x)$ са изпъкнали функции и допустимото множество на променливите S е изпъкнало множество

Недиференцируема задача на многокритериалната оптимизация



- Това е задача при която част от (или всички) критерии $f_i(x)$ и част от (или всички) функции на ограниченията $g_j(x)$ са недиференцируеми функции



Помощни дефиниции (1)

- Скалярно произведение на вектори
- Вектор x доминира вектор y
- Норма на вектор x

$$(x^T, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$x_i \leq y_i, i = \overline{1, n}$$

$$\|x\| \quad x \in R^n$$

$$\|x\| \geq 0 \quad \forall x \quad \|x\| = 0 \iff x \equiv 0$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y$$

$$\|k \cdot x\| = |k| \cdot \|x\|$$

Помощни дефиниции (2)

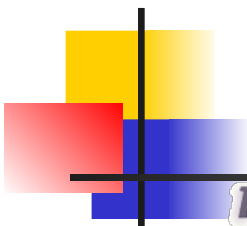
- L_p - Фамилия норми
- Най-ползвани са норми за p равно на 1, 2 и безкрайност

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$
$$p \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1, n} \{|x_i|\}$$



Помощни дефиниции (3)

- Метрика
(разстояние) в
 R^n , между два
вектора x и y ,
принадлежащи
на R^n .

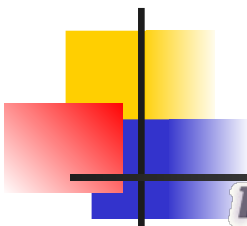
$$\|x - y\| \in R$$

$$\|x - y\| \geq 0 \quad \forall x, y$$

$$\|x - y\| = 0 \quad x \equiv y$$

$$\|x - y\| = \|y - x\| \quad \forall x, y$$

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| \quad \forall x, y, z$$



Помощни дефиниции (4)

- L_p метрика

$$\|x - y\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$
$$p \in \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$$

- Претеглена L_p метрика

$$\|x - y\|_p^\omega = \left(\sum_{i=1}^n \omega_i |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$
$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T \quad 0 \leq \omega_i \leq 1 \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

Помощни дефиниции (5)

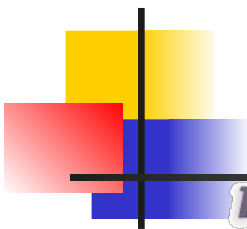
- Линейна комбинация на n вектора
- Неотрицателна
- Положителна
- Изпъкнала

$$\sum_{i=1}^n \omega_i \cdot x^i$$
$$x^1, x^2, \dots, x^n \quad \omega_i, \quad i = \overline{1, n}$$

$$\omega_i \geq 0 \quad i = \overline{1, n}$$

$$\omega_i > 0$$

$$\omega_i \geq 0 \quad i = \overline{1, n} \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1$$

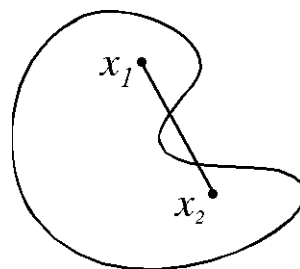
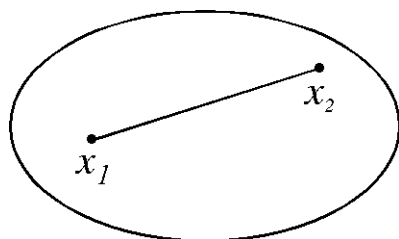


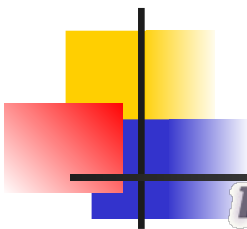
Помощни дефиниции (6)

- Изпъкнало множество
 - Изпъкнала комбинация на всеки два вектора също принадлежи на E

$$E \subset R^n$$

$$x^1, x^2 \in E$$





Помощни дефиниции (7)

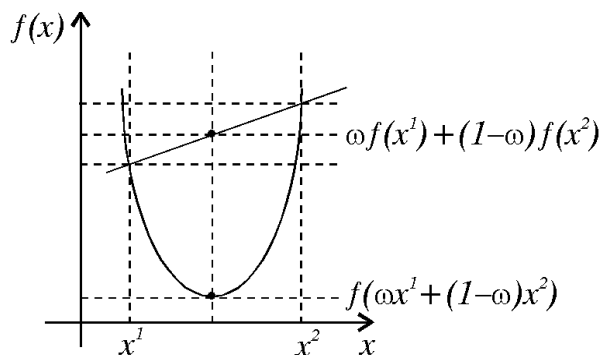
- Изпъкнала функция
 - За всеки два вектора
 - За всяко омега

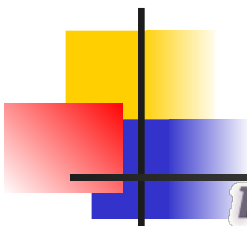
$$f(x) : R^n \rightarrow R$$

$$x^1 \in R^n, x^2 \in R^n$$

$$0 \leq \omega \leq 1$$

$$f(\omega x^1 + (1 - \omega) x^2) \leq \omega \cdot f(x^1) + (1 - \omega) \cdot f(x^2)$$





Помощни дефиниции (8)

- Множество конус

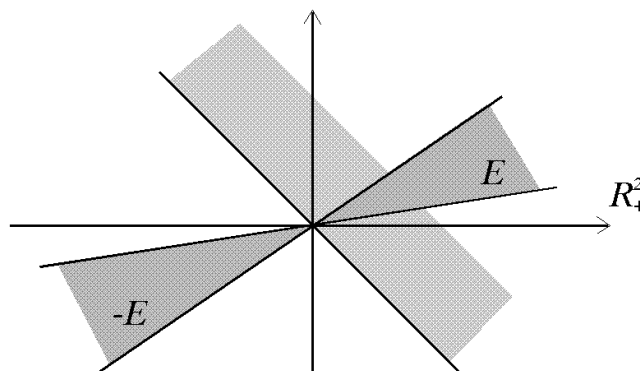
$$\begin{array}{ll} E \subset R^n & \omega x \in E \\ x \in E & \omega = 0 \end{array}$$

- Отрицателен

$$-E = \left\{ -x \in R^n \mid x \in E \right\}$$

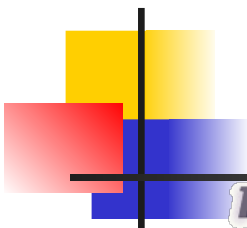
- Изострен

$$E \cap (-E) = \{0\}$$



Въпроси и отговори

Благодаря за вниманието!



Информационни източници